

CLASSIFICAÇÃO MULTIESPECTRAL AUTOMÁTICA POR MÉTODOS ESTATÍSTICOS

Por : Eng^o Humberto Carlos Garuti

SUMÁRIO

Se trata de um Método Estatístico para o reconhecimento e ampliação de "Padrões Multiespectrais".

A maioria dos programas para reconhecimento de padrões, os classificam através de métodos determinísticos ou estatísticos.

Considerando-se a classificação por métodos estatísticos, as "Regras de Decisão", em termos gerais, usam a "comparação de densidade de probabilidade". Incluídas nelas situam-se as "Regras de Decisão de Bayes", onde se destacam as técnicas da "Máxima Probabilidade".

O método apresentado é um aperfeiçoamento da Técnica de Máxima Probabilidade que facultava uma maior velocidade no processamento e aumento no grau de confiabilidade nos resultados.

TEMÁRIO

- I - Introdução
- II - Processamento de Categorização
- III- Considerações do Processamento de Categorização Multivariada
- IV - Conceitos Matemáticos
- V - Conclusão

I - INTRODUÇÃO

Num sentido geral, o objetivo da sensorialização remota compreende o reconhecimento e a avaliação de " padrões ". Estas , são aquelas identidades que contêm os traços e distintivos necessários para sua identificação, localização e quantificação , em e de um complexo de informações e dados obtidos de um determinado lugar.

Como tem sido assinalado frequentemente, o " reconhecimento de padrões ", não está restrito à detecção e classificação de padrões espaciais. Em um sentido matemático, um padrão é uma série de valores numéricos (vector característico) que descreve o estado de um feito ou objeto em particular, Esta série de valores, nesta matéria, corresponde a aqueles percebidos ou detectados em várias faixas de " longitude de ondas " do Espectro Eletromagnético. Então, teremos para este caso, os " Padrões Espectrais ".

Devemos assinalar, que para a identificação e determinação da informação obtida por detecção remota, utiliza-se separada como juntamente os " Padrões Espaciais " e os " Padrões Espectrais " segundo a complexidade do tema, a que cabe agregar assim mesmo, o uso da informação de caráter temporal quando se fizer necessária.

Ademais, para os propósitos de nossa descrição, o reconhecimento de padrões se refere a sua determinação e análise utilizando a aplicação de metodologias estatísticas e sistemas de computação especialmente concebidos para tal processamento. A automatização do reconhecimento de toda uma série de feitos ou objetos, conduz à manipulação de imagens de formação digital, e requer correlativamente o uso de uma série de métodos e técnicas capazes de satisfazer tal propósito.

Ou seja, que a implementação digital de distintos modos de discriminação e decisão de pertinência, compreende, uma gama muito importante de softwares, que variam segundo a base estatística e o equipamento utilizado.

A maioria dos programas para reconhecimento de padrões multiespectrais, baseiam-se em dados do " Esquadrinhador Multiespectral ", destinados em geral, a lograr a " categorização de padrões", ou seja, localizar um padrão desconhecido dentro de um grupo de uma série de classes de padrões, quer seja utilizando métodos de discriminação e/ou de classificação.

O primeiro, inclui todos os tipos de análise de discriminantes e utiliza mostras conhecidas de determinados padrões, para elaborar as regras necessárias de categorização de padrões não conhecidos. O método de discriminação, pode ser: a) deterministico, onde uma certa entrada produz uma única resposta em termos de categorização a que não inclui conceitos de probabilida

de; ou b) estatístico, que se baseia na distribuição de probabilidades, as que são supostamente conhecidas " a priori " ou de terminadas empiricamente.

Os procedimentos de classificação de padrões, compreendem as técnicas de análise de grupos onde não se dispõe de mostras. Efetua-se uma sub-divisão de traços característicos por identificação de agrupamentos naturais de padrões. A natureza da classe deles mesmos se determina posteriormente através da "Amostra de Campo" para as separações obtidas.

Em geral, as regras de decisão para os métodos de discriminação estatística, dependem da comparação de densidade de probabilidades. Dentre elas teremos as regras de decisão de BAYES, que se baseiam em 3 relações: a) uma probabilidade apriorística em que se supõe conhecido ou determinado em padrão como pertencente a uma classe; b) uma probabilidade condicional, como ocorrência, caso pertença a uma determinada classe; e c) uma perda de função para o caso em que um padrão é classificado dentro do um grupo, quando em realidade pertence a outro.

Supondo-se nas regras de decisão de BAYES; as probabilidades " a priori " iguais, aquelas se reduzem às técnicas de " máxima probabilidade ". Estas são técnicas extensamente empregadas para o reconhecimento de padrões derivados de dados espectrais e se baseiam na distribuição normal multivariada dentro das classes.

Um aperfeiçoamento desta última, utiliza uma transformação do espaço e grupos, para determinar as direções em que se maximizam os valores de variância grupal, a fim de incrementar a separabilidade de classes. Consideraremos aqui este método, do qual se fará apenas uma simples descrição.

Na descrição que se tenta fazer para este último caso, (Fig. nº 1) o processamento consiste em:

a) Na implementação e análise interativa de áreas discretas e dados conhecidos do sítio ou cena a processar no sistema de computação interativo, onde o analista com conhecimentos de "campo verdadeiro" de " sítios testemunha " da cena a analisar e utilizando " interpretação manual", determina e delimita para a formação do sistema, a série de dados obtidos " in situ ".

De tal forma, o sistema através de programas apropriados, obtém a informação total da cena, as " mostras espectrais " das aquelas áreas com conteúdos conhecidos (áreas instruídas) conforme o analista tenha delimitado e dado tal informação ao sistema.

Delas, com os programas correspondentes, deriva-se uma série de " regras " de decisão, baseadas no processamento de categorização multivariado.

b) O passo seguinte é aplicar tais regras de decisão aos dados originais do total de cena sob análise, a fim de obter como saída, tais dados categorizados, conforme os grupos de limitados pelo analista.

Esta saída pode estar em forma de categorias codificadas armazenadas em fitas magnéticas, utilizáveis para arquivar em um " Banco de Dados " ou como entrada para outro sistema digital, ou a saída pode estar em forma de " imagem código-cor " onde cada cor representa uma categoria ou combinação de categorias, conforme foram assinaladas pelo analista. Ademais, dele se obtém uma série de parâmetros e coeficientes de uso estatístico.

II - PROCESSAMENTO DE CATEGORIZAÇÃO

Indiquemos previamente, que uma " medida multiespectral " compreende as amostras digitais - para estes casos - reflectância (ou radiação reflectada) demarcada por um pixel, da cena vista pelo esquadrinhador, (Fig.2).

É conveniente, para melhor compreensão, representar em um gráfico tridimensional, três das medidas espectrais do espaço de n dimensões ($n = n_0$ de bandas em processamento) que descreve e compreende cada " medida multiespectral ". Neste espaço, ou gráfico, cada medida " triespectral " é registrada como um valor ou ponto espacial simples (Fig.3).

Na representação, os eixos r , s e t são quaisquer das medidas espectrais compreendidas na medida multiespectral, tais como seriam as bandas 4, 5 e 7 da informação do Landsat, ou seja, a representação é o registro que se vai obtendo em 3 das bandas ou canais de detecção de um determinado sensor. As outras bandas, pelas razões apontadas anteriormente, não estão indicadas neste gráfico tridimensional, não obstante que sua existência seja perfeitamente aceita.

Se se toma um certo número de medidas de pixels que têm o mesmo tipo de cobertura de terreno, as ditas medidas estarão agrupadas em um determinado volume do " espaço de medidas ". O tamanho deste volume ou agrupamento, está limitado e/ou determinado pelo nível de ruído existente em cada canal de dados do esquadrinhador multiespectral e pelas variações naturais das medidas das características espectrais ou firmas, no tocante à faixa estatística de tais valores.

Como se percebe no gráfico, estes volumes podem enquadrar-se dentro de uma elipsóide de revolução (para agrupamentos de distribuição normal multivariada), na qual, os pontos

que caem sobre o limite de elipsoide, correspondem a valores de dispersão em relação e respeito o valor médio com um desvio standard de $S = 1$.

A técnica de que se trata, pressupõe que exista uma distribuição normal multivariada para cada grupo determinado pelas denominadas "áreas treinadas" ou "áreas instruídas", que se correspondem com aquelas áreas de conteúdo conhecido em superfície e na imagem e especificado para conhecimento e processamento posterior no computador. Baseados em distintas experiências operativas e análise de dados multiespectrais, a mencionada suposição de uma distribuição normal multivariada conduz ao logro de performances elevadas.

Conforme se indicam e especificam ao computador as áreas, instruídas, e estas são agregadas a um determinado grupo, se desenvolvem no "espaço de medidas" um certo número de agrupamentos em concordância com as agregações dadas (Fig. 4).

No processo clássico de decisão de "máxima probabilidade" utilizado atualmente na maior parte em que se efetuam análises, espectrais do tipo em questão, cada nova medida de valor Z se compara com os valores de cada grupo.

Para cada um, computa-se uma probabilidade proporcional à densidade de probabilidade (conforme as modificações que sucessivamente se dão por inclusão dos fatores anteriores) ao ponto Z no tocante às distribuições de I, II e III. Isto está ilustrado no gráfico pelas linhas segmentadas subentendidas, desde o valor médio de cada grupo até o ponto Z . Calcula-se a distância e determina-se a densidade para o ponto Z , tomando o valor quadrático da distância no tocante à variância na dita direção, para cada um, a fim de efetuar a agregação, por máxima probabilidade.

Na técnica de Categorização Multivariada em descrição, a decisão se baseia também na probabilidade de que o ponto Z pertença a um dos grupos, porém o processo se efetua em um sistema de coordenadas transformadas do espaço. A utilização destas transformadas, permite um incremento de segurança e velocidade de processamento no tocante à decisão clássica por "máxima probabilidade".

A transformação se efetua independentemente para cada grupo. No exemplo que estamos utilizando, por simplificação, a transformação se indica só para um deles (Fig. 5).

O primeiro passo para a transformação, é uma translação do centro-valor médio-do grupo, o I para o caso do exemplo, a origem do espaço ou das coordenadas.

O passo seguinte, é uma troca de escalas em cada direção, seccionadas para transformar os limites do elipsoide de revolu

ção que compreende o grupo, em uma esfera, ou uma hiperesfera para o caso de um hiperespaço. No exemplo ilustrativo, os volumes e limites dos grupos II e III, indicam-se alongados no sistema de eixos i_A'' e j_A'' , como consequência da primeira ação.

O passo seguinte, todo o sistema se gira ao redor r_I'' , r_{II}'' e r_{III}'' da origem não afetando isto o grupo I já que o mesmo a esta altura do processo forma uma hiperesfera. A rotação é selecionada de tal forma a maximizar a variância de todos os grupos na primeira direção r_I'' . Esta direção, constitui nestas condições, aquela " mais efetiva " para a tomada de decisão da pertinência de um determinado valor no grupo em questão, no caso do exemplo o I e todos os outros grupos.

A seguinte direção S_I'' , é ortogonal a r_I'' e a mesma se seleciona também de forma a maximizar a variância de todos os outros grupos em tal direção. Assim, se continua até completar os eixos que constituem o hiperespaço.

No modo de processo de decisão, deve-se levar em conta, a distância do valor em análise, ponto Z para nosso caso, se quencialmente em cada um dos espaços para cada grupo. O valor (ponto Z) se seleciona com a mais alta probabilidade, como pertencente a aquele grupo que, em processo de translações e rotações sucessivas, indica a menor distância a origem da posição do dito valor ou ponto.

III - CONSIDERAÇÕES DO PROCESSAMENTO DE CATEGORIZAÇÃO MULTIVARIADA

O uso deste método, frente ao clássico de máxima probabilidade, confere certas vantagens sem perda da generalidade, que implica esta última.

Uma delas, é que se pode obter maior segurança em um nível de decisão, utilizando a mesma quantidade de dados conhecidos ou áreas instruídas.

Posterior à análise das áreas instruídas, se tem uma série de parâmetros estatísticos que são denominados autovalores (matricial). Obtêm-se um autovalor para cada eixo, e uma série destes por cada grupo. Cada autovalor, é a variância dos outros grupos medidos com respeito e na direção desses eixos.

Assim, o primeiro eixo terá o autovalor mais alto; o segundo é subsequentemente mais alto e assim sucessivamente. Para dados do tipo LANDSAT, uma sequência típica de 4 destes valores seria

$$A = 398; A_2 = 104; A_3 = 11 \text{ e } A_4 = 2,8.$$

Supondo-se no caso em que a média do autovalor dos grupos distintos do de hipótese em análise e segundo os eixos selecionados para este último, tenha um valor de variância igual a 145, a desviação standard no tocante à origem será:

$s = 145 = 12$, (Fig.6). Como se vê na ilustração, para este caso, o grupo hipótese é muito separado para uma avaliação de Z'' nessas direções.

Um caso distinto se apresenta quando um autovalor é menor que um. Se neste caso a avaliação de Z'' , ainda mais perto do valor médio ou origem do grupo hipotético se confunde com a média do autovalor dos outros grupos. Não se utiliza este valor para formular a decisão.

Conforme se agregam canais (Fig.7), com dados de outras bandas, para sua análise em conjunto, se incrementa a segurança de um dado obtido com esta técnica, o que não ocorre para o caso de máxima probabilidade, que obriga a uma re-seleção de melhores canais para separar os objetivos buscados.

A decisão compreende a avaliação sequencial da probabilidade de cada grupo. O ordenamento dos eixos, conduz a efetuar o processo com velocidade, já que o primeiro eixo selecionado, tem a probabilidade maior de rejeitar o valor - se esse for o caso - como pertencente a um determinado grupo no nível de decisão. Assim, se na primeira computação, se descobrir que a medida do valor Z'' está afastada (em valores de S) respeito a origem segundo uma hipótese prévia o umbral ou nível estabelecido pelo operador, o mesmo é imediatamente rejeitado.

O processo de decisão pode exemplificar-se com uma série de módulos (Fig. 8), onde cada um deles representa um passo com três saídas: a) rejeição porque a distância dos pixels com respeito à origem, excede a distância total da hipótese principal; ou b) rejeição porque a distância excede ao número de desvios standard estabelecidos pelo operador como umbral ou c) aceitação provisional do grupo, ao obter o vector $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$

dos grupos examinados. Observa-se que o fato de alcançar cada módulo em forma seriada e sequencial requer um incremento de tempo na consecução do processamento de cada um deles. Por esse motivo, as rejeições nos primeiros eixos daquelas grupos que mostram no processamento, não alcançam os níveis de distância, e/ou umbral, e lavando-se assim a examinar a seguinte condição de pertinência a outros grupos, evita as perdas de tempo por não continuar com as análises para todos os eixos do grupo.

IV - CONCEITOS MATEMÁTICOS

O método de categorização descrito, emprega uma série de conceitos e formulações matemáticas que possibilitam a obtenção dos coeficientes canônicos e autovalores que utilizam no programa de classificação para a determinação da pertinência grupal de cada pixel e/ou padrão.

Os cálculos foram ordenados de forma a serem utilizados em programas a rodar em computadores. O tratamento dos mesmos se efetua em forma de matriz. Em tal sentido, utilizam-se as matrizes de covariância para cada grupo, com respeito à origem do grupo hipótese respeitando-se seu valor médio, a dos outros grupos respeito o valor médio do grupo hipótese e o do valor médio do grupo hipótese. Por conseguinte, obtém-se os valores médios, a somatória dos produtos cruzados das desviações respeito os valores médios e as desviações standard.

Sob a mesma consideração de matriz, obtém-se os autovetores para a consecução das variáveis canônicas.

Os dados utilizados são os valores de reflectância de cada pixel em cada banda por categoria em análise que conformam num total o número de observações contidas em todas as áreas instruídas em cada banda de cada categoria. (Fig.9).

As formulas gerais da estatística matemática que se usam no programa, convenientemente dispostas para tal finalidade, são as do Quadro I.

V - CONCLUSÃO

Podemos concluir, que o presente método, a ser utilizado, em sistemas interativos, tem três níveis de macro processos : a instrução do sistema, a análise e categorização e a classificação.

O analista, seleciona áreas instruídas com o conteúdo de dados multiespectrais de pequenas áreas em cena das que possuam informação de campo verdadeiro e que aparecem homogêneas na imagem exibida. No nível de análise, avalia-se estatisticamente a série de áreas instruídas ministradas ao sistema, para determinar os coeficientes ótimos de categorização e prever a performance que terá a classificação. Nesta última, se utilizam os coeficientes de categorização obtidos na análise, para ligar cada elemento à categoria mais provável de pertinência.

O método permite a análise e classificação de áreas muito extensas, com alto grau de segurança e rapidez, de acordo com experiências efetuadas e conforme a justificação teórica descrita.

BIBLIOGRAFIA

1. Proceedings of the Michigan Symposia on Remote Sensing of Environment (University of Michigan), 1969, 1971, 1974 e 1975.
2. Environmental Research Institute of Michigan, 1972.
3. Pattern Recognition, Duda and Hart, 1972.
4. Statistics in Research. Iowa State College; 1954
5. Análisis Matemático, Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo; 1963
6. Autovalores Algebraicos, Wilkinson, 1965.
7. Subrutinas Científicas, Internacional Business Machines; 1970
8. Fortran y Assembler PDP-11, DEC Maynard; 1974.
9. Root Programs Notes - R. Dye - Michigan - U.S.A.
10. Métodos Matemáticos para Computadores Digitales - J. Wiley N. York - 1972.

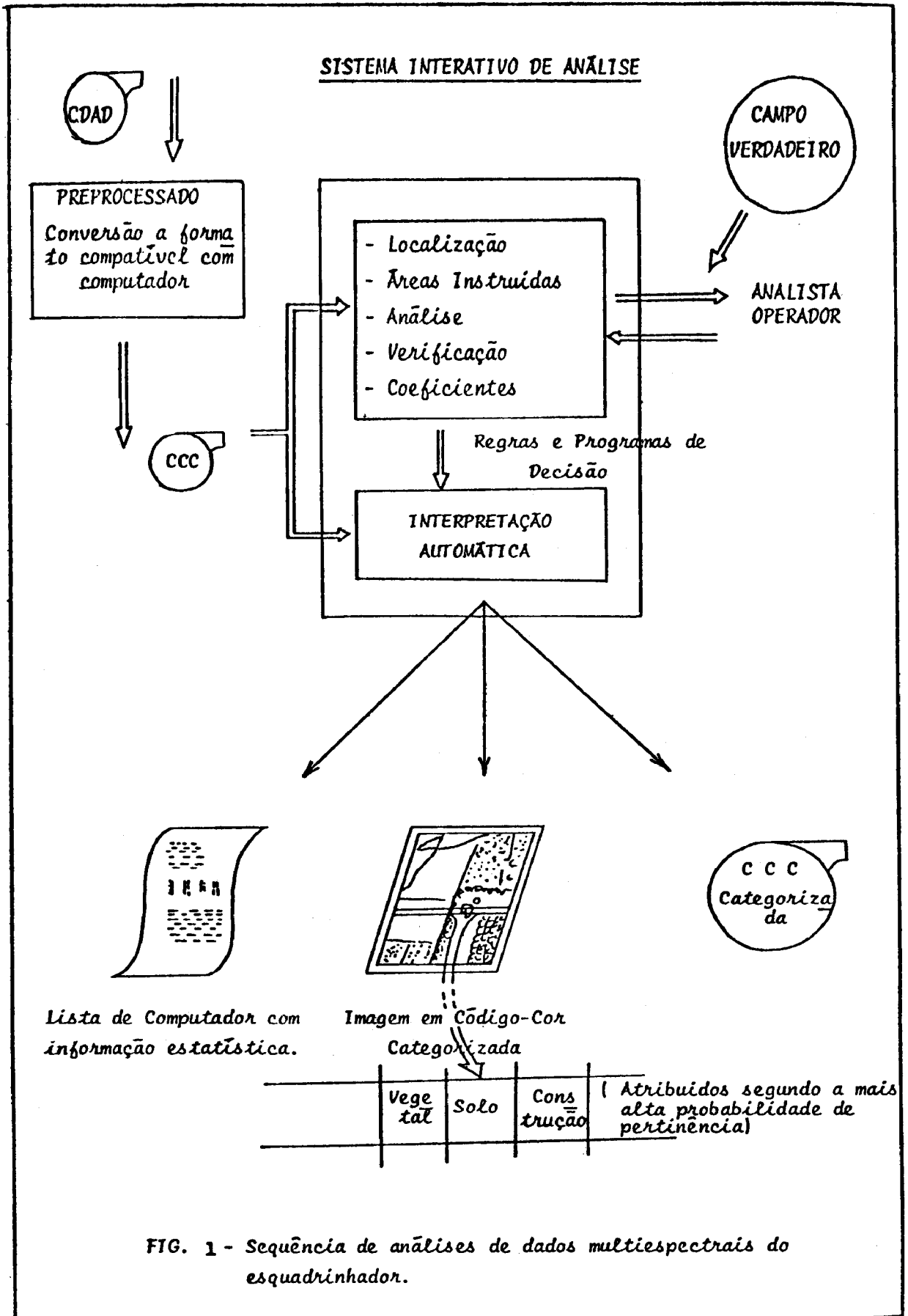


FIG. 1 - Sequência de análises de dados multiespectrais do esquadrinhador.

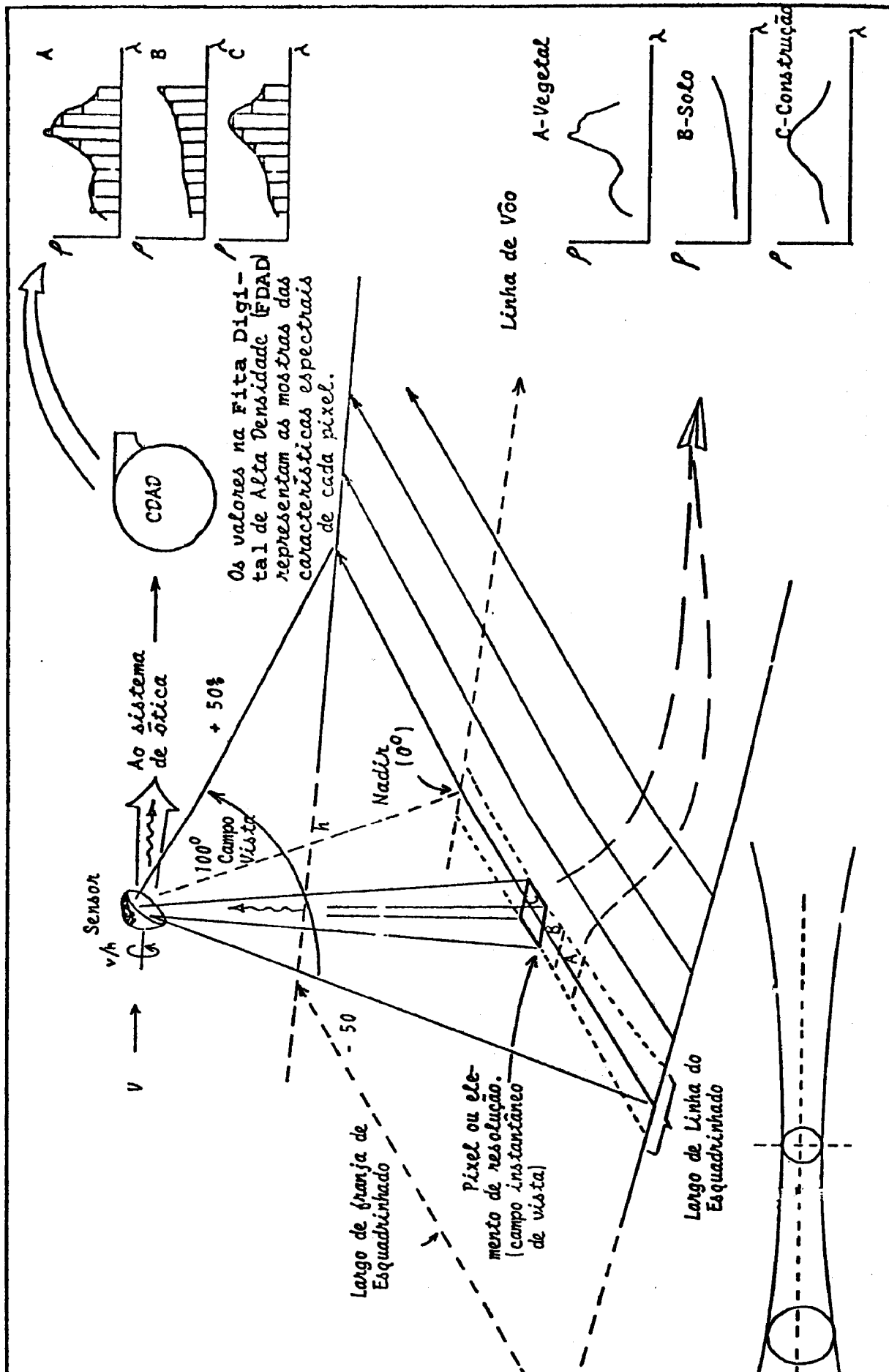


FIG. 2 - CARACTERÍSTICAS DO ESQUADRINHADO

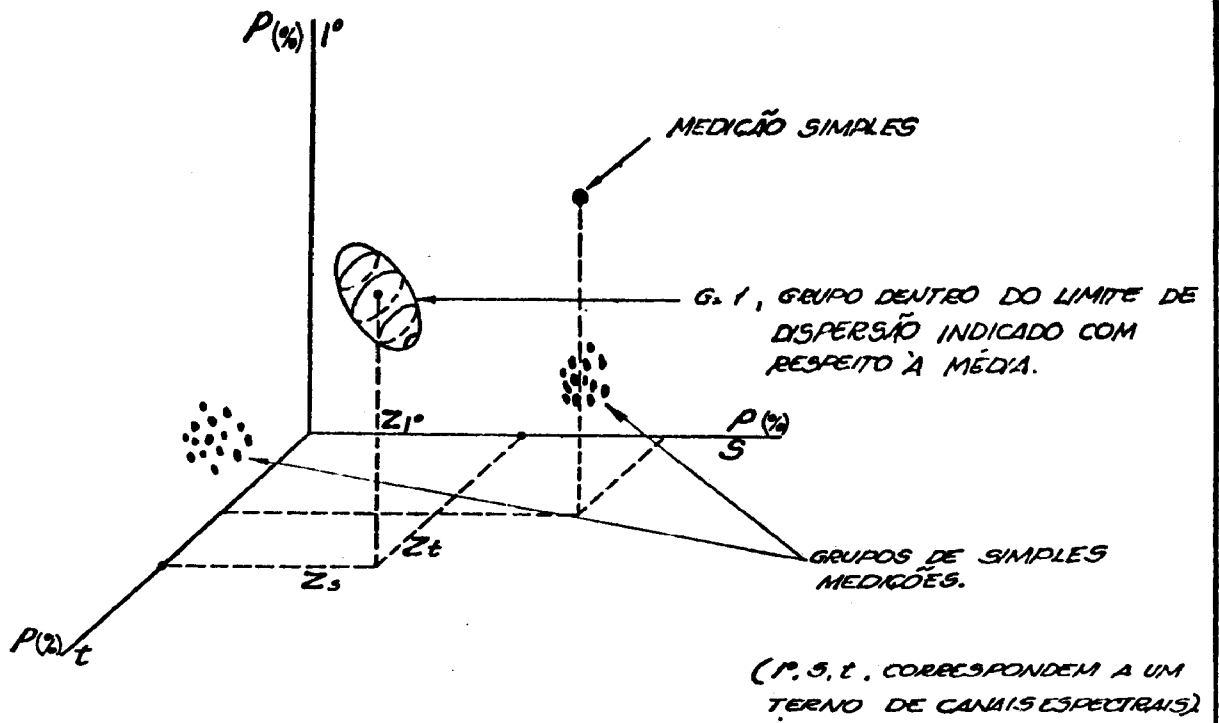


FIG. 3. REPRESENTAÇÃO DO ESPAÇO DE MEDIDA DE TRES CANAIS.

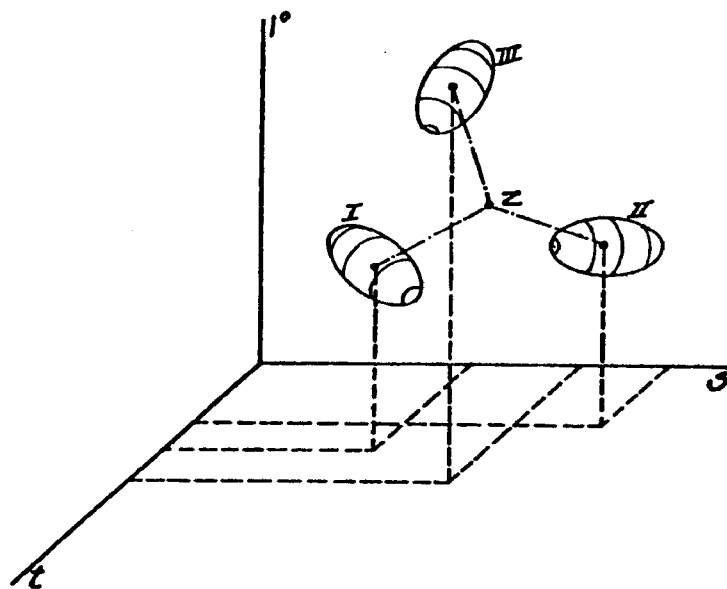
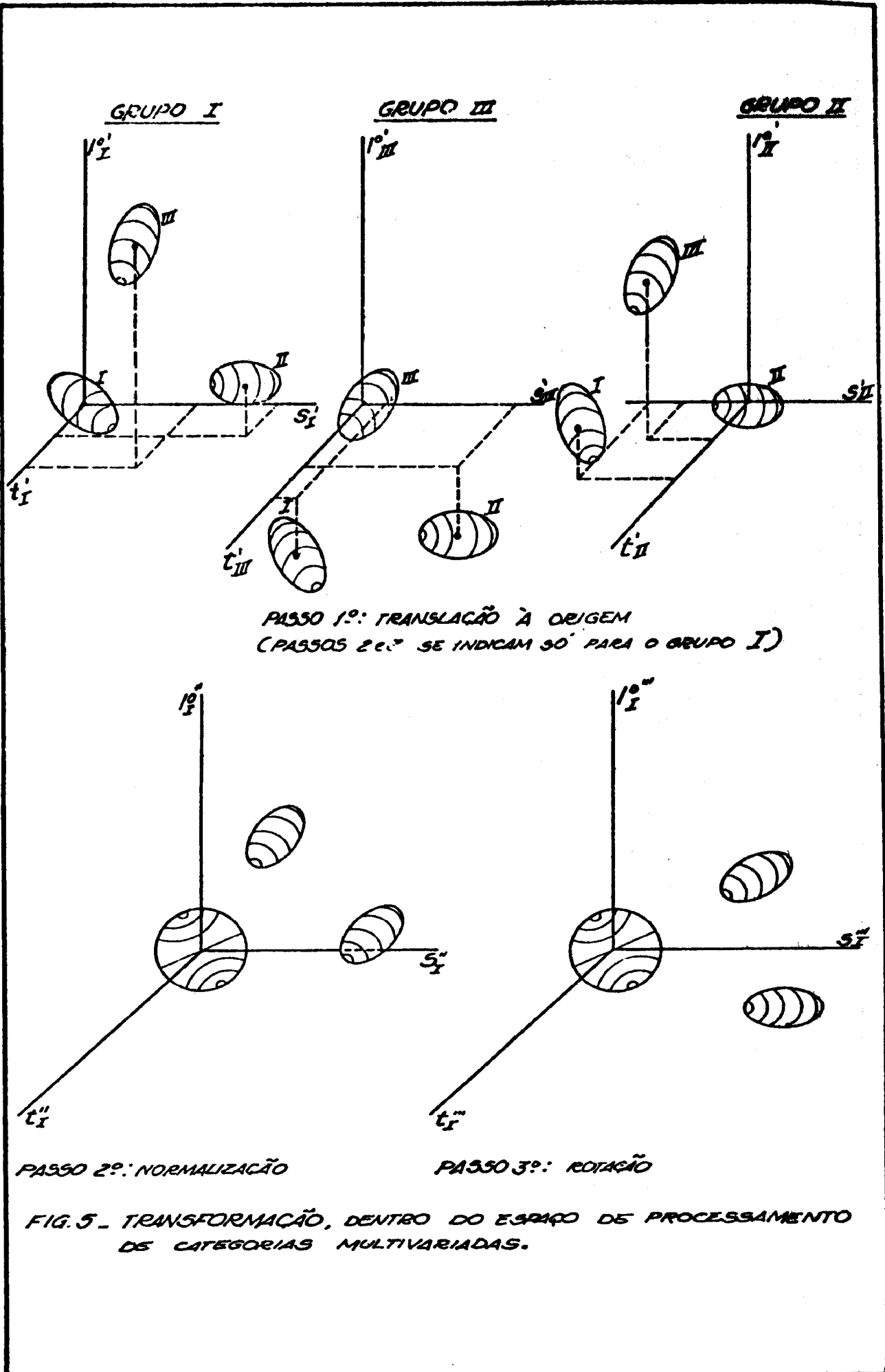
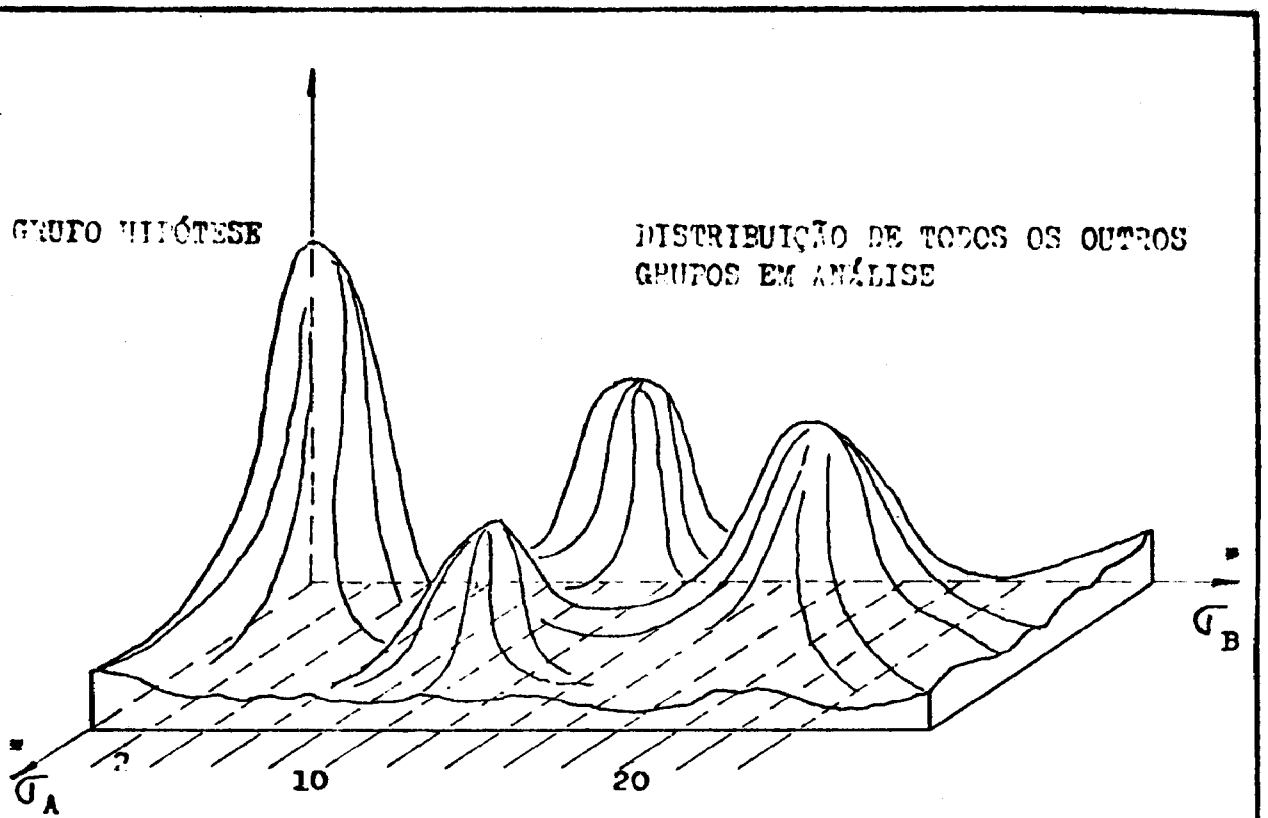
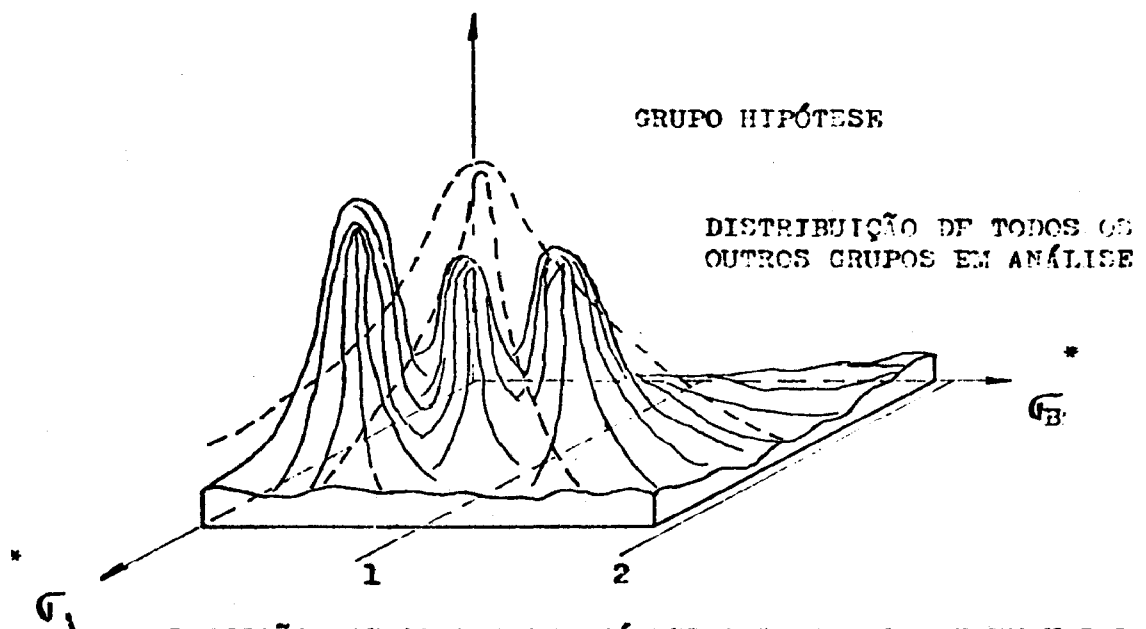


FIG. 4. AGRUPAMENTOS NO GRANDE ESPAÇO DE MEDIDAS.





PROJEÇÃO DOS GRUPOS EM ANÁLISE PARA O CASO DE UM VALOR DIRECIONAL DE VARIÂNCIA ELEVADO DOS GRUPOS DISTINTOS DE HIPÓTESE (VDV=145)



PROJEÇÃO DOS GRUPOS EM ANÁLISE PARA O CASO DE UM VALOR DIRECIONAL DE VARIÂNCIA MUITO PEQUENO DOS GRUPOS DISTINTOS DE HIPÓTESE (VDV < 1)

* = NÚMERO DE DESVIACÕES STANDARD EM EIXOS DO ESPAÇO DE PROCESSAMENTO DE CATEGORIZAÇÃO MULTIVARIADA.

Fig.6 - PROJEÇÃO DOS GRUPOS EM ANÁLISE

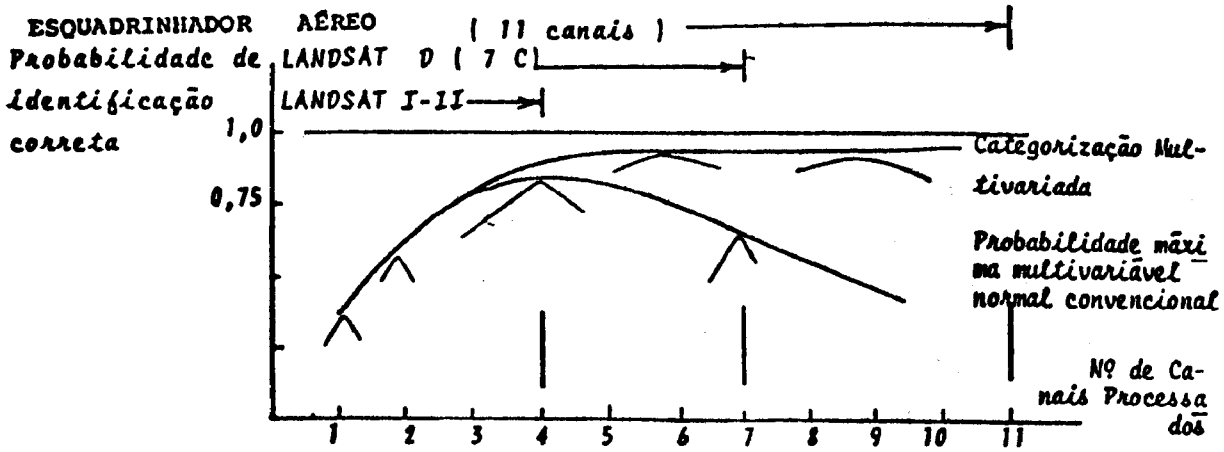


FIG. 7 - Relação entre a probabilidade de identificação correta de amostras homogêneas com respeito à quantidade de canais espectrais processados

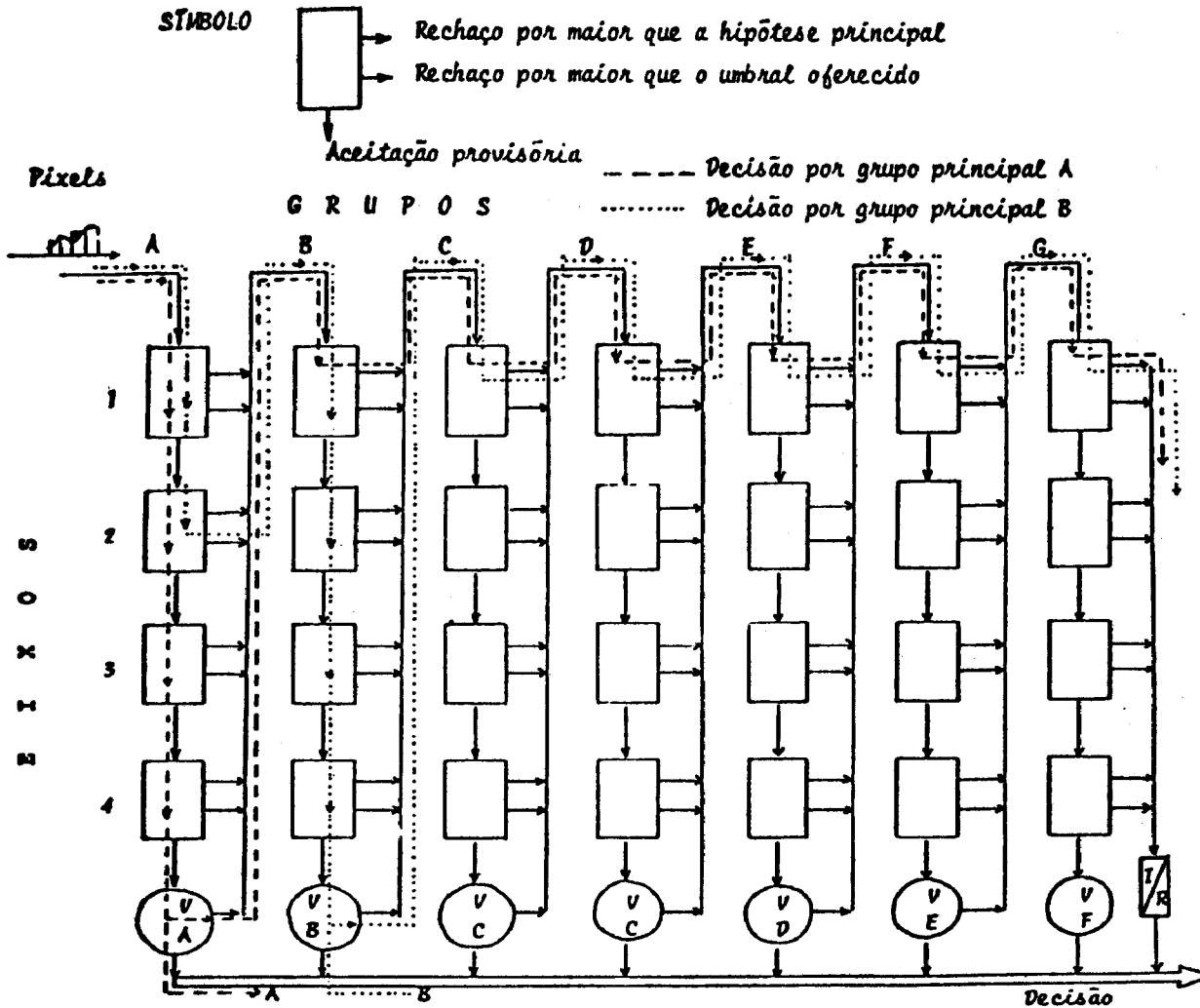
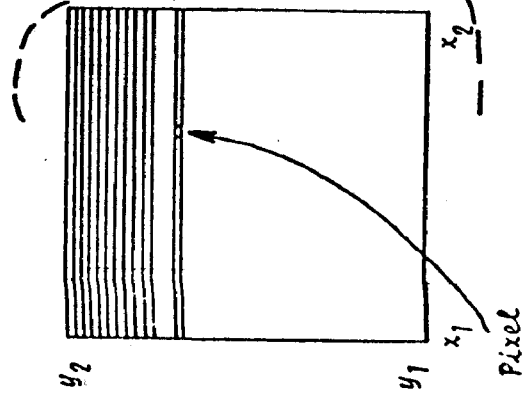


FIG. 8 - Fluxo do Processo de Decisão por Categorização Multivariada

		MOSTRAS														
		CATEGORIA 1						CATEGORIA j								
Área Instruída		1		2		3		1		2		3		i		
Nº		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1																
2																
3																
m																
N_j		x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{1l}	x_{2l}	x_{3l}	x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}

Área Instruída



(Com o conteúdo de cada banda espectral detectada)

x_1, x_2, y_1, y_2 são as coordenadas extremas da área instruída

Nota: N é a somatória de pixels de todas as áreas instruídas, enquanto que a somatória das x_{ij} é o número de pixels para cada faixa das categorias presentes nas áreas instruídas.

FIG 9 - Disposição dos dados para o processamento

1 - Valor médio; Valor Quadrático médio e Quadrado do Valor Médio.

$$\bar{x}_{ij} = \frac{\sum_{ij} x_{ij}}{N_j}$$

Onde:

- i = Número de faixas espectrais;
- j = Número de Categorias;
- N_j = Número de Observações em cada faixa para cada categoria;
- Com faixa = 10mnds

$$\frac{(x_{ij})^2}{N_j}$$

$$(\bar{x}_{ij})^2 = \left[\frac{\sum_{ij} x_{ij}}{N_j} \right]^2$$

2 - Soma dos produtos cruzados das desvios

$$\text{de } \frac{\sum_{ij} (x_{ij} \cdot x_{i'j'})}{N_j}$$

$$\text{e } (\bar{x}_{ij} \cdot \bar{x}_{i'j'})$$

teremos:

$$\sigma_{ii'} = \frac{\sum_{ij} (x_{ij} \cdot x_{i'j'})}{N_j} - (\bar{x}_{ij} \cdot \bar{x}_{i'j'})$$

Onde:

- i = 1 a n
- i' = 2 a n
- i ≠ i'
- sendo n = Número máximo de faixas utilizadas

3 - Desviação Standard

$$\text{de } s_{ij}^2 = \frac{\sum_{ij} (x_{ij})^2}{N_j} - (\bar{x}_{ij})^2 \quad \text{Variância}$$

teremos:

$$s_{ij} = \left[\frac{\sum_{ij} (x_{ij})^2}{N_j} - (\bar{x}_{ij})^2 \right]^{1/2}$$

4 - Covariância

$$R_p = \frac{1}{n-t-1} \sum_s (A_s - B) (A_{s+t-1} - B)$$

Onde:

- A_s = Ordenamento das séries de observações;
- n = Número de Observações;
- t = Nº de Deferimentos
- s = 1 a n-t+1

5 - Autovalores e Autovectores

a - Matriz Simétrica A de ordem N.

Os autovalores são desenvolvidos nos elementos diagonais da Matriz, desenvolvendo também uma Matriz R de autovectores. Utiliza-se uma Matriz identidade como primeira aproximação de R. A norma fora de diagonal inicial se calcula:

$$B = \frac{1}{n} \sum_i A_s$$

com $i = 1 a n$

QUADRADO I (e)

$$V_I = \left\{ \begin{matrix} 1 < k \\ 2 A_{ik} \end{matrix} \right\}^{1/2}$$

V_I = Norma Inicial;

A = Matriz Simétrica de Entrada.

Esta norma se divide por N para cada estado a fim de produzir o nível umbral. A norma final se calcula:

$$V_F = \frac{V_I \times 10^{-6}}{N}$$

Esta se estabelece suficientemente pequena para que qualquer elemento fora de diagonal seja menor que V_F em valor absoluto, para definir a convergência do processo.

Cada elemento fora de diagonal se seleciona e se produz uma transformação para eliminá-lo (rotação).

$$\lambda = -A_{lm}$$

$$\mu = 1/2 (A_{11} - A_{mm})$$

$$w = \text{sign}(\mu) \frac{\lambda}{\left(\frac{\lambda^2}{2} + \mu^2 \right)^{1/2}}$$

$$\text{Sen } \theta = \frac{w}{\left(2(1 + (1-w)^2) \right)^{1/2}}$$

$$\text{Cos } \theta = (1 - \text{Sen}^2 \theta)^{1/2}$$

$$B = A_{11} \text{Cos } \theta - A_{lm} \text{Sen } \theta$$

$$A_{lm} = A_{11} \text{Sen } \theta + A_{lm} \text{Cos } \theta$$

$$A_{11} = B$$

$$B = R_{11} \text{Cos } \theta - R_{lm} \text{Sen } \theta$$

$$R_{lm} = R_{11} \text{Sen } \theta + R_{lm} \text{Cos } \theta$$

$$R_{11} = B$$

$$A_{11} = A_{11} \text{Cos}^2 \theta + A_{mm} \text{Sen}^2 \theta - 2 A_{lm} \text{Sen } \theta \text{Cos } \theta$$

$$A_{mm} = A_{11} \text{Sen}^2 \theta + A_{mm} \text{Cos}^2 \theta + 2 A_{lm} \text{Sen } \theta \text{Cos } \theta$$

$$A_{lm} = (A_{11} - A_{mm}) \text{Sen } \theta \text{Cos } \theta + A_{lm} (\text{Cos}^2 \theta - \text{Sen}^2 \theta)$$

Esta operação se repete até que todos os elementos de rotação sejam menores que o umbral.

b - Matriz não simétrica da forma $B^{-1}A$, onde B e A são matrizes reais simétricas.

Forma-se uma matriz simétrica, utilizando os elementos do triângulo superior da matriz quadrada B. Logo os autovalores h_i e a matriz de autovectores H da Matriz simétrica, calculam-se segundo o caso anterior (5-a). A recíproca da raiz quadrada de cada autovalor se forma:

$$\mu = \frac{1}{(h_i)^{1/2}} \quad \begin{matrix} i = 1 \text{ a } m \\ m = \text{ordem da matriz B} \end{matrix}$$

A Matriz $B^{-1/2}$ se forma multiplicando a coluna vector j de H por μ_j ($j = 1 \text{ a } m$).

A Matriz simétrica S = $(B^{-1/2})' A B^{-1/2}$, se forma:

$$Q = (B^{-1/2})' A, \text{ logo: } S = QB^{-1/2}$$

e se calcula segundo o método do caso anterior os autovalores λ_i

e a matriz de autovectores M. Forma-se logo a matriz

$W = B^{-1/2} M$ e normalizam-se os vectores em W para formar a Matriz de autovectores V:

$$V_{ij} = \frac{W_{ij}}{(2_j)^{1/2}} \quad \begin{matrix} i = 1 \text{ a } m \\ j = 1 \text{ a } m \end{matrix}$$

onde $Z_j = \sum_{i=1}^m w_{ij}^2$

6- Coeficientes Canônicos

Baseado numa Matriz de intercorrelação C (p/2 series), divide-se a mesma em quatro sub-matrizes:

$$C = \begin{array}{|c|c|} \hline C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \\ \hline \end{array}$$

onde:

C_{11} = Intercorrelação entre x variáveis de 1 primeira série;

C_{12} = Intercorrelação entre as variáveis de primeira e segunda série

C_{21} = Transposta de C_{12}

C_{22} = Intercorrelação entre y variáveis de segunda série,

nos leva à equação:

$$\begin{vmatrix} C_{11} - \lambda & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

que se resolve para todos os autovalores encontrados com a seguinte operação de Matrizes:

$$D = C_{11}^{-1} C_{12}$$

$$E = C_{21} D$$

Obtem-se com 5-b os autovalores λ_i (i = 1 a y) e os autovectores associados de $C_{21}^{-1} E$

Calcula-se para cada um dos i = 1 a y, o seguinte:

$$\text{Correlação canônica CC} = (\lambda_i)^{1/2}$$

$$\chi^2 = -(n - 0,5 (x + y + 1)) \log_e K \quad n = \text{Nº de Observações}$$

$$K = \prod_{j=1}^y (1 - \lambda_j)$$

série i de coeficientes direitos:

$b_k = v_{ki}$ onde v_{ki} = autovector associado com i.

com k = 1 a y

série i de coeficientes esquerdos:

$$a_j = \frac{\sum_{k=1}^y d_{jk} \cdot b_k}{CC} \quad \text{onde } \begin{pmatrix} d_{jk} \end{pmatrix} = D = C_{11}^{-1} C_{12}$$

com j = 1 a x

7- Equações de classificação

As equações utilizadas no programa são:

$$a \rightarrow Z_{11} = C_{01} + \sum_{j=1}^N C_{1j1} \cdot X_j \quad I = 1 \text{ a } M$$

$$b \rightarrow Z_{12} = C_{02} + \sum_{j=1}^N C_{1j2} \cdot X_j \quad I = 1 \text{ a } X$$

$$c \rightarrow S_i = Z_{11}^2 + Z_{12}^2 + C_i \quad I = 1 \text{ a } M$$

$$d \rightarrow S_K = \text{MIN } S_i \quad I = 1 \text{ a } X$$

onde: I = Nº de Categorias; J = Variável nº; N = Número de Variáveis originais; S_i = Soma da quadrados para o grupo i; K = Índice de risco mínimo grupal.